Problema 1

La auto-correlación de la función de Heaviside $H(t)$ con ella misma es

$$\begin{aligned}(H \star H) \quad (t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) H(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{0}^{\infty} H(t-\tau) d\tau \\ &= tH(t)\end{aligned}$$

Por supuesto $tH(t)$ NO es integrable en valor absoluto.

Problema 2

$$\begin{aligned}I_f &= = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| d\tau = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\tau}} d\tau = 2 \\ I_g &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)| d\tau = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\tau}} d\tau = 2\end{aligned}$$

Entonces f y g son integrables en valor absoluto.

$$\begin{aligned}(f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{1-(t-\tau)}} d\tau \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - t\tau + \tau}} d\tau\end{aligned}$$

Poniendo $t = 1$ tenemos que

$$(f \star g)(1) = \int_0^1 \frac{d\tau}{\tau}$$

que no existe porque aunque f y g sean integrables en valor absoluto, no son acotadas.

Problema 3

Problema 3a)

$$(I_a \star I_a)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} I_a(\tau) I_a(t-\tau) d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} I_a(t-\tau)\, d\tau \\
&= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} I_a(\tau-t)\, d\tau
\end{aligned}
$$

- Si $t < -a$, $(I_a \star I_a)(t) = 0$
- Si $-a \leq t \leq 0$,$(I_a \star I_a)(t) = \left[\left(t+\frac{a}{2}\right) - \left(-\frac{a}{2}\right)\right] \times 1 = t + a$
- Si $0 \leq t \leq a$,$(I_a \star I_a)(t) = \left[\frac{a}{2} - \left(t-\frac{a}{2}\right)\right] \times 1 = a - t$
- Si $t > a$,$(I_a \star I_a)(t) = 0$.

entonces

$$
(I_a \star I_a)(t) = aT_a(t)
$$

Problema 3b)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(I_a(t)) &= a\mathrm{sinc}\left(a\frac{\omega}{2}\right) \\
\mathcal{F}(T_a(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} T_a(t)\, e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{|t|}{a}\right) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t} dt + \int_{-a}^{0} \frac{t}{a} e^{-i\omega t} dt - \int_{0}^{a} \frac{t}{a} e^{-i\omega t} dt \\
&= 2a\mathrm{sinc}(\omega a) + \frac{1}{a}\frac{d}{d(-i\omega)}\left[\frac{1-e^{-i\omega(-a)}}{-i\omega}\right] - \frac{1}{a}\frac{d}{d(-i\omega)}\left[\frac{e^{-i\omega a}-1}{-i\omega}\right] \\
&= 2a\mathrm{sinc}(\omega a) + \left[\frac{e^{i\omega a}(1-i\omega a)-1}{-a\omega^2}\right] + \left[\frac{1-e^{-i\omega a}(1+i\omega a)}{a\omega^2}\right] \\
&= 2a\mathrm{sinc}(\omega a) + 2\frac{1-\cos(\omega a) - \omega a \sin(\omega a)}{a\omega^2} \\
&= 2\frac{1-\cos(a\omega)}{a\omega^2}
\end{aligned}
$$

Además tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(I_a(t))^2 &= a^2 \frac{\sin\left(a\frac{\omega}{2}\right)^2}{\left(a\frac{\omega}{2}\right)^2} \\
&= \frac{4}{\omega^2}\left(\frac{1-\cos(a\omega)}{2}\right) \\
&= a\mathcal{F}(T_a(t))
\end{aligned}
$$

Problema 4

$$(I_a \star I_a)(t) = aT_a(t)$$

donde hemos utilizado el resultado del problema 3.

$$\begin{aligned}(I_a \star T_a)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} I_a(\tau) T_a(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} T_a(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} T_a(\tau - t) d\tau\end{aligned}$$

$(I_a \star T_a)(t)$ es una función par, entonces podemos hacer el calculo únicamente para $t < 0$ y deducir el resto.

- Si $t < -a$, $(I_a \star T_a)(t) = 0$
- Si $-a \leq t \leq -\frac{a}{2}$,$(I_a \star T_a)(t) = \left[\left(t + \frac{a}{2}\right) - \left(-\frac{a}{2}\right)\right] \times \frac{f_1(t)}{2} = (t+a)\frac{2\frac{t}{a}+2}{2}$, (con f_1 una función lineal para la cual $f_1(-a) = 0$ y $f_1\left(-\frac{a}{2}\right) = 1$)
- Si $-\frac{a}{2} \leq t \leq 0$,$(I_a \star T_a)(t) = \frac{a}{4} + \left\{\frac{a}{4} - \left[-\frac{a}{2} - \left(t - \frac{a}{2}\right)\right] \times \frac{f_2(t)}{2}\right\} = \frac{a}{2} + t\frac{f_2(t)}{2} = \frac{a}{2} - \frac{t^2}{a}$,(con f_2 una función lineal para la cual $f_2\left(-\frac{a}{2}\right) = 1$ y $f_2(0) = 0$)

Utilizando la transformada de Fourier

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(I_a \star T_a) &= = \mathcal{F}\left(I_a \star \frac{I_a \star I_a}{a}\right) = \frac{1}{a}\mathcal{F}(I_a)^3 \\ &= \frac{1}{a}\left(a\mathrm{sinc}\left(a\frac{\omega}{2}\right)\right)^3 = a^2\mathrm{sinc}^3\left(a\frac{\omega}{2}\right)\end{aligned}$$

Problema 5

Problema 5a)

$$\begin{aligned}(f \star f)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) H(t-\tau) \exp(-a\tau - a(t-\tau)) d\tau \\ &= e^{-at}\int_0^{\infty} H(t-\tau) d\tau \\ &= e^{-at}\int_0^{t>0} 1 \times d\tau \\ &= te^{-at}H(t)\end{aligned}$$

Utilizando que la Transformada de Fourier de $e^{-at}H(t)$ es $1/(a+i\omega)$ y la dualidad $t \to d/d(-i\omega)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f \star f) &= \mathcal{F}\left[H(t)\, te^{-at}\right] \\
&= \frac{d}{d(-i\omega)}\mathcal{F}\left[H(t)\, e^{-at}\right] \\
&= \frac{d}{d(-i\omega)}\frac{1}{a+i\omega} \\
&= \frac{1}{(a+i\omega)^2}
\end{aligned}$$

También tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f \star f) &= \mathcal{F}(f)^2 \\
&= \frac{1}{(a+i\omega)^2}
\end{aligned}$$

Problema 5b)

La auto-correlación está definida como la convolución de $f(t)$ con $\acute{f} = f(-t)^{\star}$,

$$\rho_f(t) = f \star \acute{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, f(\tau - t)^{\star}\, d\tau$$

La transformada de Fourier de la auto-correlación es igual al modulo cuadrado de la transformada de Fourier de f.

$$\mathcal{F}\left(f \star \acute{f}\right) = \mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}\left(\acute{f}\right) = \tilde{f}(\omega)\,\tilde{f}(\omega)^{\star} = |\tilde{f}(\omega)|^2$$

En nuestro caso tenemos que

$$\begin{aligned}
\rho_f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau)\exp(-a\tau)\, H(\tau - t)\exp(-a(\tau - t))\, d\tau \\
&= e^{at}\int_{0}^{\infty} \exp(-2a\tau)\, H(\tau - t)\, d\tau
\end{aligned}$$

si $t > 0$, tenemos

$$\rho_f(t) = e^{at}\int_{t}^{\infty} \exp(-2a\tau)\, d\tau = \frac{1}{2a}e^{-at}$$

Si $t < 0$, tenemos

$$\rho_f(t) = e^{at}\int_{0}^{\infty} \exp(-2a\tau)\, d\tau = \frac{1}{2a}e^{at}$$

es decir en el caso general

$$\rho_f(t) = \frac{1}{2a}e^{-a|t|}$$

La Transformada de Fourier de ρ_f vale

$$\mathcal{F}(\rho_f) = \frac{1}{2a}\frac{2a}{a^2+\omega^2} = \frac{1}{a^2+\omega^2}$$

o también de manera indirecta

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\rho_f) &= \left|\mathcal{F}\left(H(t)\,e^{-a|t|}\right)\right|^2 \\
&= \left|\frac{1}{a+i\omega}\right|^2 \\
&= \frac{1}{a^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

Problema 6

Problema 6a)

La convolución de $\exp(-|t|)$ con ella misma vale

$$\begin{aligned}
c_f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|\tau|)\exp(-|t-\tau|)\,d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|\tau|)\exp(-|\tau-t|)\,d\tau
\end{aligned}$$

En nuestro caso tenemos que, con $t<0$

$$\begin{aligned}
c_f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}e^{-|\tau-t|}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t} \exp(-|\tau|-|\tau-t|)\,d\tau + \int_{t}^{0} \exp(-|\tau|-|\tau-t|)\,d\tau + \int_{0}^{\infty} \exp(-|\tau|-|\tau-t|)\,d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t} \exp(\tau+\tau-t)\,d\tau + \int_{t}^{0} \exp(\tau-(\tau-t))\,d\tau + \int_{0}^{\infty} \exp(-\tau-(\tau-t))\,d\tau \\
&= \frac{1}{2}e^t - te^t + \frac{1}{2}e^t \\
&= e^t - te^t
\end{aligned}$$

De la misma manera con $t>0$

$$c_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}e^{-|\tau-t|}d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{0} \exp\left(-|\tau| - |\tau - t|\right) d\tau + \int_{0}^{t} \exp\left(-|\tau| - |\tau - t|\right) d\tau + \int_{t}^{\infty} \exp\left(-|\tau| - |\tau - t|\right) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{0} \exp\left(\tau + \tau - t\right) d\tau + \int_{0}^{t} \exp\left(-\tau + \tau - t\right) d\tau + \int_{t}^{\infty} \exp\left(-\tau - (\tau - t)\right) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{0} \exp\left(\tau + \tau - t\right) d\tau + \int_{0}^{t} \exp\left(-\tau + \tau - t\right) d\tau + \int_{t}^{\infty} \exp\left(-\tau - (\tau - t)\right) d\tau \\
&= \frac{1}{2}e^{-t} + te^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t} \\
&= e^{-t} + te^{-t}
\end{aligned}$$

Entonces en el caso general tenemos que

$$c_f(t) = e^{-|t|}\left(1 + |t|\right)$$

Problema 6b)

La transformada de Fourier de ρ_f es simplemente

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(c_f) &= \left|\mathcal{F}\left(e^{-|t|}\right)\right|^2 \\
&= \frac{1}{|1 + i\omega|^2} \\
&= \frac{1}{1 + \omega^2}
\end{aligned}$$

Problema 6c)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(c_f) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\left(1 + |t|\right) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-|t|}\left(1 + |t|\right) e^{-i\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-|t|}\left(1 + |t|\right) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{t}\left(1 - t\right) e^{-i\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t}\left(1 + t\right) e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{1 - i\omega} + \frac{1}{1 + i\omega} + \int_{0}^{\infty} te^{-(1+i\omega)t} dt - \int_{-\infty}^{0} te^{(1-i\omega)t} dt \\
&= \frac{1}{1 - i\omega} + \frac{1}{1 + i\omega} + \frac{d}{d\alpha}\left[\int_{0}^{\infty} te^{\alpha t} dt\right]_{\alpha = -(1+i\omega)} - \frac{d}{d\alpha}\left[\int_{-\infty}^{0} te^{\alpha t} dt\right]_{\alpha = 1 - i\omega} \\
&= \frac{1}{1 - i\omega} + \frac{1}{1 + i\omega} + \frac{d}{d\alpha}\left[-\frac{1}{\alpha}\right]_{\alpha = -(1+i\omega)} - \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}\right]_{\alpha = 1 - i\omega} \\
&= \frac{1}{1 - i\omega} + \frac{1}{1 + i\omega} + \frac{1}{(1 + i\omega)^2} + \frac{1}{(1 - i\omega)^2}
\end{aligned}$$

Problema 7

Comprobarlo...

Problema 8

El valor principal de Cauchy de la integral I se define como

$$\begin{aligned} I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega} d\omega &= \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{1}{1+i\omega} d\omega \\ &= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{i} \ln \frac{1+iA}{1-iA} \\ &= \frac{1}{i} \ln(-1) \\ &= \frac{1}{i} \ln\left(e^{i\pi}\right) = \pi \end{aligned}$$

Utilizando que $1/(1+i\omega)$ es la Transformada de Fourier de $f(t) = H(t)\exp(-t)$, tenemos la integral de Fourier siguiente

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{1}{1+i\omega} d\omega \\ F(t) &= \frac{1}{2} \left[f\left(t^{-}\right) + f\left(t^{+}\right) \right] \end{aligned}$$

Entonces

$$I \quad = F(0) = \quad 2\pi \frac{f(0^{-}) + f(0^{+})}{2} = \pi \left[H\left(0^{-}\right) e^{-0^{-}} + H\left(0^{+}\right) e^{0^{+}} \right] = \pi$$

Problema 9

la función $I_a(t)$ es integrable en valor absoluto y continua a trozos. Entonces

$$I_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a \operatorname{sinc}\left(a\frac{\omega}{2}\right) e^{i\omega t} d\omega$$

Como el seno cardinal es una función par, la integral de Fourier se puede simplificar en

$$I_a(t) = \frac{a}{\pi} \int_{0}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(a\frac{\omega}{2}\right) \cos(\omega t)\, d\omega$$

Con $t = \pm a/2$ tenemos que

$$\begin{aligned} I_a\left(\pm\frac{a}{2}\right) &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\omega} \sin\left(a\frac{\omega}{2}\right) \cos\left(a\frac{\omega}{2}\right) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin(a\omega)}{\omega} d\omega \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(a\omega)}{a\omega}da\omega \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

donde hemos utilizado la integral de Dirichlet $\int_0^\infty \sin(x)/xdx = \pi/2$.

Hacer la transformada de Fourier de una función discontinua y a continuación anti-transformar (con la integral de Fourier) da una función continua (teorema de Riemann-Lebesgue)

$$
f_c(t) = \frac{f(t_-) + f(t_+)}{2}
$$

Problema 10

La integral de Fourier de una función par o impar vale

$$
\begin{aligned}
p(t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(\omega t) F_c(\omega)d\omega \\
i(t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(\omega t) G_s(\omega)d\omega
\end{aligned}
$$

con las definiciones siguientes de F_cy G_s

$$
\begin{aligned}
F_c(\omega) &= \int_0^\infty p(t)\cos(\omega t)\,dt \\
G_s(\omega) &= \int_0^\infty i(t)\sin(\omega t)\,dt
\end{aligned}
$$

Construimos una función impar que vale $+1$ para $0 < t \leq a$ y -1 para $-a < t < 0$, de tal manera que tenemos

$$
\begin{aligned}
G_s(\omega) &= \int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)\,dt \\
&= \int_0^a \sin(\omega t)\,dt \\
&= \frac{1-\cos(\omega a)}{\omega}
\end{aligned}
$$

Sigue que $f(t)$ se puede escribir como

$$
f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(\omega t)\frac{1-\cos(\omega a)}{\omega}d\omega
$$

Problema 11

La dualidad entre la transformada y la integral de Fourier se define como

$$
\begin{aligned}
f(t) &\rightarrow F(\omega) \\
F(-t) &\rightarrow 2\pi f(\omega)
\end{aligned}
$$

Conocemos la transformada de Fourier de $T_a(t)$ (ver problema 3b)

$$T_a(t) \quad \to \quad \frac{4}{a\omega^2}\sin^2\left(\frac{a\omega}{2}\right)$$

De eso se deduce que la transformada de Fourier de $\sin^2(at/2)/t^2$ (donde hemos puesto $t = -t$ sin cambiar nada) vale

$$\frac{1}{t^2}\sin^2(at/2) \quad \to \quad \frac{a}{4}\left[2\pi T_a(\omega)\right] = \frac{a\pi}{2}T_a(\omega)$$

Problema 12

Utilizando el teorema de la dilatación tenemos

$$\begin{aligned} I_1(t) &\quad \to \quad \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ I_a(t) &\quad \to \quad a\operatorname{sinc}\left(\frac{a\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

El teorema de la Transformada de Fourier del producto de convolución dice que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f \star g) &= \mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g) \\ &= \tilde{f}(\omega)\,\tilde{g}(\omega) \end{aligned}$$

Entonces

$$[I_a \star I_a](t) \quad \to \quad a^2\operatorname{sinc}^2\left(\frac{a\omega}{2}\right)$$

Utilizando la dualidad (con $\omega = -t$ pero la función es par)

$$a^2\operatorname{sinc}^2\left(\frac{at}{2}\right) \quad \to \quad 2\pi\left[I_a \star I_a\right](\omega)$$

Finalmente

$$\sin^2\left(\frac{at}{2}\right) \quad \to \quad \frac{\pi}{4}\left[I_a \star I_a\right](\omega)$$

Problema 13a)

$$\begin{aligned} f_a(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t^2-2t+2}e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(t-1)^2+1}e^{-i\omega(t-1+1)}dt \\ &= e^{-i\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}e^{-i\omega x}dx,\ (x = t-1) \\ &= e^{-i\omega}\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}\right] \end{aligned}$$

Conocemos la Transformada de Fourier de $\exp(-|t|)$

$$\exp(-|t|) \quad \rightarrow \quad \frac{2}{1+\omega^2}$$

Entonces utilizando la dualidad discutida en el problema 11), tenemos también que

$$\frac{2}{1+(-t)^2} \quad \rightarrow \quad 2\pi\exp(-|\omega|)$$

y encontramos el resultado final como

$$f_a(\omega) \quad = \quad e^{-i\omega}\pi\exp(-|\omega|)$$

Problema 13b)

$$\begin{aligned}
f_b(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin[2\pi(t-3)]}{t-3}e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin[2\pi(t-3)]}{t-3}e^{-i\omega(t-3+3)}dt \\
&= 2\pi e^{-3i\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin[2\pi x]}{2\pi x}e^{-i\omega x}dx,\ (x=t-3) \\
&= 2\pi e^{-3i\omega}\mathcal{F}\left[\operatorname{sinc}\left(4\pi\frac{x}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$I_1(t) \quad \rightarrow \quad \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Utilizando la propiedad de dilatación

$$f(ct) \quad \rightarrow \quad |c|^{-1}F\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

encontramos que

$$I_{4\pi}(t) = I_1\left(\frac{t}{4\pi}\right) \quad \rightarrow \quad 4\pi\operatorname{sinc}\left(4\pi\frac{\omega}{2}\right)$$

Entonces utilizando la dualidad discutida en el problema 11), tenemos también que

$$4\pi\operatorname{sinc}\left(4\pi\frac{t}{2}\right) \quad \rightarrow \quad (2\pi)\,I_{4\pi}(\omega)$$

que permite encontrar f_b como

$$f_b(\omega) \quad = \quad \pi e^{-3i\omega}I_{4\pi}(\omega)$$

Problema 13c)

$$
\begin{aligned}
f_c(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(4t)}{t^2-4t+7} e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(4t)}{(t-2)^2+3} e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-2)^2+3} \frac{e^{i4t}-e^{-i4t}}{2i} e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{f_1(\omega-4)-f_1(\omega+4)}{2i}
\end{aligned}
$$

con

$$
\begin{aligned}
f_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-2)^2+3} e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-2)^2+3} e^{-i\omega(t-2+2)} dt \\
&= e^{-2i\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+3} e^{-i\omega x} dx
\end{aligned}
$$

Utilizando la dualidad como en el problema 13a)

$$
f_1(\omega) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}|\omega|}
$$

Al fin

$$
f_c(\omega) = \frac{\pi}{2i\sqrt{3}} \left[e^{-\sqrt{3}|\omega-4|} - e^{-\sqrt{3}|\omega+4|} \right]
$$

Problema 13d)

$$
\begin{aligned}
f_d(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2[3(t-1)]}{t^2-2t+1} e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2[3(t-1)]}{(t-1)^2} e^{-i\omega(t-1+1)} dt \\
&= 9e^{-i\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2(3x)\, e^{-i\omega x} dx \\
&= 9e^{-i\omega} \mathcal{F}\left[\operatorname{sinc}^2\left(6\frac{x}{2}\right) \right]
\end{aligned}
$$

Conocemos la Transformada de Fourier de la función triangulo T_1 como el cuadrado de la transformada del rectángulo I_1

$$\mathcal{F}\left(T_1\right) \quad = \quad \mathcal{F}\left(I_1\right)^2 = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

es decir

$$T_1\left(t\right) \quad \rightarrow \quad \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Utilizando la dualidad tenemos también (poniendo $\omega = -t \rightarrow t$ porque la función es par) que

$$\operatorname{sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \left(2\pi\right) T_1\left(\omega\right)$$

entonces, utilizando la dilatación con un factor 6 acabamos con

$$\operatorname{sinc}^2\left(6\frac{t}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{2\pi}{6}\right) T_1\left(\frac{\omega}{6}\right) = \frac{\pi}{3} T_6\left(\omega\right)$$

y entonces

$$f_d\left(\omega\right) \quad = \quad 3\pi e^{-i\omega} T_6\left(\omega\right)$$

Problema 14

Problema 14a)

$$\tilde{f}_a\left(\omega\right) \quad = \quad \frac{1}{\omega^2+4} = \frac{1}{4}\frac{2\left(2\right)}{\left(2\right)^2+\omega^4}$$

$$f_a\left(t\right) \quad = \quad \frac{1}{4}e^{-2|t|}$$

Ver por ejemplo el Problema 6 de la Hoja 3.

Problema 14b)

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_b\left(\omega\right) &= I_{2a}\left(\omega-\omega_0\right) + I_{2a}\left(\omega+\omega_0\right) \\
&= 2\frac{I_{2a}\left(\omega-\omega_0\right) + I_{2a}\left(\omega+\omega_0\right)}{2} \\
&= 2\mathcal{F}\left(h\left(t\right)\cos\left(\omega_0 t\right)\right)
\end{aligned}$$

con $h\left(t\right)$ la función que tiene $I_{2a}\left(\omega\right)$ como espectro. Como sabemos que

$$I_1\left(t\right) \quad \rightarrow \quad \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$I_1\left(\frac{t}{2a}\right) = I_{2a}\left(t\right) \quad \rightarrow \quad \left(2a\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{4a}\right)$$

utilizando la dualidad (poniendo $\omega = -t$)

$$(2a)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{4a}\right) \quad \rightarrow \quad (2\pi)\, I_{2a}\,(t)$$

y encontramos $h\,(t)$ como

$$h\,(t) \quad = \quad \frac{1}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{4a}\right)$$

y entonces $f_b\,(t)$

$$f_b\,(t) \quad = \quad \frac{1}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{4a}\right)\cos\left(\omega_0 t\right)$$

Problema 14c)

$$\begin{aligned} \tilde{f}_c\,(\omega) &= \exp\left(-3|\omega-9|\right) \\ &= \tilde{h}\,(\omega-9) \end{aligned}$$

con $\tilde{h}\,(\omega) = \exp\left(-3|\omega|\right)$. Sabemos que

$$e^{-a|t|} \quad \rightarrow \quad \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

entonces

$$\frac{2a}{a^2+t^2} \quad \rightarrow \quad (2\pi)\, e^{-a|\omega|}$$

encontramos que

$$h\,(t) \quad = \quad \frac{3}{\pi}\frac{1}{9+t^2}$$

y que

$$f_c\,(t) \quad = \quad h\,(t)\, e^{i9t}$$

Problema 15

Problema 16

Se demuestra utilizando la dualidad (ver el problema 13a) dos veces.

Problema 17

Podemos utilizar la dualidad (ver el problema 13a) y la transformada de Fourier del producto de convolución

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[P_a \star P_b\right] &= \mathcal{F}\left[P_a\right]\mathcal{F}\left[P_b\right] \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \mathcal{F}\left[\frac{2a}{a^2+t^2}\right]\mathcal{F}\left[\frac{2b}{b^2+t^2}\right] \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 (2\pi)\, e^{-a|\omega|}\,(2\pi)\, e^{-b|\omega|} \\
&= \exp\left(-\left(a+b\right)|\omega|\right)
\end{aligned}$$

y finalmente (poniendo $\omega = -z$ para transformar $\mathcal{F}^{-1}$ en $\mathcal{F}$)

$$\begin{aligned}
P_a \star P_b &= \mathcal{F}^{-1}\left[\exp\left(-\left(a+b\right)|\omega|\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[\exp\left(-\left(a+b\right)|z|\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{2\left(a+b\right)}{\left(a+b\right)^2+x^2}
\end{aligned}$$

Problema 18

Tenemos una función anti-simétrica (impar). La TF vale

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t}e^{-t}dt - \int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega t}e^{t}dt \\
&= \frac{1}{1+i\omega} - \frac{1}{1-i\omega} \\
&= \frac{-2i\omega}{1+\omega^2}
\end{aligned}$$

Podemos escribir la anti-transformada de $f(t)$ como

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-2i\omega}{1+\omega^2} e^{i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-2i\omega}{1+\omega^2}\left[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right] d\omega \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\omega \sin(\omega t)}{1+\omega^2} d\omega
\end{aligned}$$

Problema 18c

LA identidad de Parseval dice que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Poniendo $F(\omega) = \omega / \left(1+\omega^2\right)$ tenemos que

$$\begin{aligned} 2\int_0^\infty |F(\omega)|^2 d\omega &= (2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \\ &= (2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{f_{18}(t)}{-2i}\right|^2 dt \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $|F(\omega)|^2$ es una función par y el resultado del problema 18. Como $|f_{18}(t)| = \exp(-|t|)$, tenemos que

$$\begin{aligned} 2\int_0^\infty |F(\omega)|^2 d\omega &= (2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} e^{-2|t|} dt \\ &= \frac{(2\pi)}{2}\int_0^\infty e^{-2|t|} dt \end{aligned}$$

al fin

$$\int_0^\infty |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{\pi}{4}$$

Problema 19