problema 1

La transformada de Fourier como integral impropia es definida como el doble limite

$$\tilde{f}(\omega) = \lim_{A\to-\infty}\lim_{B\to\infty}\int_A^B f(t)\,e^{-i\omega t}dt$$

Sigue que la transforma de Fourier de la función de Heaviside $H(t)$ es dado por

$$\tilde{H}(\omega) = \lim_{B\to+\infty}[\frac{e^{-i\omega B}-1}{-i\omega}]$$

que no converja.

Problema 2

Problema 2a)

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t)\,e^{-at}e^{-i\omega t}dt = \left[\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{a+i\omega}$$

Problema 2b)

La anti-transformada de $\tilde{f}(\omega)$ está definida como integral impropia

$$g(t) = \lim_{A\to-\infty}\lim_{B\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_A^B \tilde{f}(\omega)\,e^{i\omega t}d\omega$$

que, por ejemplo tiene un problema en $t=0$,

$$\begin{aligned}\Im[g(0)] &= \lim_{A\to-\infty}\lim_{B\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_A^B\left[-\frac{\omega}{a^2+\omega^2}\right]d\omega = \lim_{A\to-\infty}\lim_{B\to\infty}\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\ln\left(a^2+\omega^2\right)\right]_A^B \\ &= -\frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{a^2+B^2}{a^2+A^2}\right) \sim -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{B}{A}\end{aligned}$$

Esta expresión no tiene un límite único para cualquier combinación de valores de A y de B, entonces no converge en el sentido de una integral de Riemann.

c)

$$\begin{aligned}\lim_{a\to0} f(t) = \lim_{a\to0} \quad H(t)\,e^{-at} &= \quad H(t) + \mathcal{O}(a) \\ \lim_{a\to0}\tilde{f}(\omega) = \lim_{a\to0} \quad \tfrac{1}{a+i\omega} &= \quad \frac{1}{i\omega} + \mathcal{O}(a)\end{aligned}$$

Representar el gráfico de la función $\sin(B\omega)/\omega$ y de $\cos(B\omega)/\omega$.

Problema 3

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(\omega) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\, e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(1-\omega)it}}{(1-\omega)\,i}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(-1-\omega)it}}{(-1-\omega)\,i}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\sin\left[(1-\omega)\frac{\pi}{2}\right]}{1-\omega} + \frac{\sin\left[(1+\omega)\frac{\pi}{2}\right]}{1+\omega} \\
&= \frac{-\cos\left[\omega\frac{\pi}{2}\right]}{1-\omega} - \frac{\cos\left[\omega\frac{\pi}{2}\right]}{1+\omega} \\
&= -\cos\left[\omega\frac{\pi}{2}\right]\left(\frac{1}{1-\omega} + \frac{1}{1+\omega}\right) = \frac{2\cos\left[\omega\frac{\pi}{2}\right]}{\omega^2-1}
\end{aligned}
$$

La función $f(t)$ es par: eso implica una transformada de Fourier real. ¿ Qué pasa cuando $\omega \to 1$ y $\omega \to \infty$?

Problema 4

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(\omega) &= \int_{-1}^{1} |t| e^{-i\omega t} dt = \int_{-1}^{0} (-t)\, e^{-i\omega t} dt + \int_{0}^{1} t e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{0}^{1} t\left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right) dt = \int_{0}^{1} 2t\cos(\omega t)\, dt
\end{aligned}
$$

Haciendo una integración por partes se encuentra que

$$
\begin{aligned}
\int_{0}^{1} 2t\cos(\omega t)\, dt &= [2t\frac{\sin(\omega t)}{\omega}]_0^1 - \int_{0}^{1} 2\frac{\sin(\omega t)}{\omega} dt \\
&= 2\frac{\sin(\omega)}{\omega} - \frac{2}{\omega}\left[-\frac{\cos\omega t}{\omega}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\omega}\left[\sin(\omega) + \frac{\cos\omega}{\omega} - \frac{1}{\omega}\right]
\end{aligned}
$$

¿ Qué pasa cuando $\omega \to 0$ y $\omega \to \infty$?

Problema 5

$$
\tilde{f}(\omega) = \int_{-\frac{a}{2}}^{0} (-1)\, e^{-i\omega t} dt + \int_{0}^{\frac{a}{2}} (+1)\, e^{-i\omega t} dt
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{a}{2}} e^{-i\omega t} - e^{i\omega t} dt \\
&= \left[-2\cos\omega t\right]_0^{\frac{a}{2}} = 2\frac{1-\cos\frac{a\omega}{2}}{\omega}
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{\omega\to 0} \tilde{f}(\omega) = \lim\nolimits_{\omega\to 0} \quad \frac{2}{\omega}\left(\frac{a^2\omega^2}{8} + \mathcal{O}\left(\omega^4\right)\right) = 0
$$

Problema 6

$$
f(t) = f_1(t) + f_2(t)
$$

Suponiendo que $a = 2 > 0$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}_1(\omega) &= 3\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-i\omega t}dt \\
&= 3\int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-i\omega t}dt + 3\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-i\omega t}dt \\
&= 3 \left[\frac{1}{a-i\omega} - \frac{1}{-a-i\omega}\right] \\
&= 3\frac{2a}{a^2+\omega^2} = \frac{12}{4+\omega^2}
\end{aligned}
$$

-

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}_2(\omega) &= \int_{-a}^{a}\left(1-\frac{|t|}{a}\right)e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}dt + \int_{-a}^{0}\frac{t}{a}e^{-i\omega t}dt - \int_0^a \frac{t}{a}e^{-i\omega t}dt \\
&= \frac{e^{-i\omega a} - e^{+i\omega a}}{-i\omega} + \frac{1}{a}\frac{d}{d(-i\omega)}\int_{-a}^{0} e^{-i\omega t}dt - \frac{1}{a}\frac{d}{d(-i\omega)}\int_0^a e^{-i\omega t}dt \\
&= 2a\mathrm{sinc}(\omega a) + \frac{1}{a}\frac{d}{d(-i\omega)}\left[\frac{1-e^{-i\omega(-a)}}{-i\omega}\right] - \frac{1}{a}\frac{d}{d(-i\omega)}\left[\frac{e^{-i\omega a}-1}{-i\omega}\right] \\
&= 2a\mathrm{sinc}(\omega a) + \left[\frac{e^{i\omega a}(1-i\omega a)-1}{-a\omega^2}\right] + \left[\frac{1-e^{-i\omega a}(1+i\omega a)}{a\omega^2}\right] \\
&= 2a\mathrm{sinc}(\omega a) + 2\frac{1-\cos(\omega a) - \omega a\sin(\omega a)}{a\omega^2} \\
&= 2\frac{1-\cos(a\omega)}{a\omega^2}
\end{aligned}
$$

¿ Qué pasa cuando $\omega \to 0$? ¿ Por qué las transformadas de $f_{1,2}$ son reales ?

Problema 7

El teorema de la modulación dice que

$$\mathcal{F}\left(f(t)\,e^{ibt}\right) = \tilde{f}_1(\omega - b)$$

Entonces el problema se reduce a conocer la transformada de Fourier de $f(t) = \exp(-7|t|)$ tal y como en el problema 6 con $a = 7$

$$\tilde{f}_1(\omega) = \frac{14}{49+\omega^2}$$

Encontramos la transformada de $f(t)$ como

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\omega) &= \tfrac{1}{2} \quad \tilde{f}_1(\omega-\pi) + \frac{1}{2}\tilde{f}_1(\omega+\pi) \\ &= \frac{14}{49+(\omega-\pi)^2} + \frac{14}{49+(\omega+\pi)^2}\end{aligned}$$

Problema 8

Problema 8a)

Se puede aplicar el calculo directamente, o utilizar el teorema de la modulación con las funciones $\exp(at)$ y $\exp(-at)$. Eso permite conseguir

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)\sin(at)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(at)\,e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{1}{2i}\left(e^{iat}-e^{-iat}\right)e^{-i\omega t}dt \\ &= \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i(\omega-a)t}dt - \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i(\omega+a)t}dt \\ &= \frac{\tilde{f}(\omega-a)-\tilde{f}(\omega+a)}{2i}\end{aligned}$$

Problema 8b)

La transformada de la función rectángulo de ancho unidad vale $\mathrm{sinc}(\omega/2)$. Por consecuencia, la Transformada de Fourier del rectángulo de ancho 2π es (usando el teorema de la dilatación temporal)

$$\tilde{I}_{2\pi}(\omega) = (2\pi)\,\mathrm{sinc}\left((2\pi)\,\frac{\omega}{2}\right) = 2\pi\mathrm{sinc}(\pi\omega)$$

Por consecuencia, la transformada de $f(t)\sin(at)$ vale

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)\sin(at)] &= \frac{2\pi}{2i}\left\{\mathrm{sinc}[\pi(\omega-a)] - \mathrm{sinc}[\pi(\omega+a)]\right\} \\ &= i\pi\left\{\mathrm{sinc}[\pi(\omega+1)] - \mathrm{sinc}[\pi(\omega-1)]\right\}\end{aligned}$$

donde hemos puesto $a = 1$.

Problema 9

Como lo hemos visto en el problema 2, la transformada de Fourier de $f_0(t) = H(t)\exp(-at)$vale

$$\tilde{f}_0(\omega) = \frac{1}{a+i\omega}$$

Problema 9a)

Utilizando el teorema de la modulación

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t)\cos(bt)\, e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{\tilde{f}_0(\omega-b)+\tilde{f}_0(\omega+b)}{2} \\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{a+i(\omega-b)}+\frac{1}{a+i(\omega+b)}\right]
\end{aligned}$$

Problema 9b)

Utilizando también el teorema de la modulación tenemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t)\sin(bt)\, e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{\tilde{f}_0(\omega-b)-\tilde{f}_0(\omega+b)}{2i} \\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{a+i(\omega-b)}-\frac{1}{a+i(\omega+b)}\right]
\end{aligned}$$

Problema 10

Problema 10a)

Sabemos dos cosas

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\omega) &= \tilde{f}(-\omega) \\
f(t)^{\star} &= f(t)
\end{aligned}$$

Utilizando la definición de la Transforma de Fourier con ω y con $-\omega$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt \\
\tilde{f}(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t} dt
\end{aligned}$$

Haciendo la suma de las dos expresiones de $\tilde{f}(\omega) = \left(\tilde{f}(\omega) + \tilde{f}(-\omega)\right)/2$ tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t)\, dt \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

y entonces $\tilde{f}(\omega) \in \mathbb{R}$ si $f(t) \in \mathbb{R}$.

Problema 10b)

Sabiendo que $f(t) \in \mathbb{R}$, intentamos deducir algo sobre $\tilde{f}(\omega)$. Escribiendo la definición de la Transformada de Fourier, tenemos que

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

Tomando el complejo conjugado de esta ultima expresión tenemos que

$$\begin{aligned} \left[\tilde{f}(\omega)\right]^{\star} &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt\right]^{\star} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^{\star}\, e^{i\omega t} dt \\ &= \tilde{f}(-\omega) \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $f(t) \in \mathbb{R}$. Se deduce entonces que el modulo de $\tilde{f}(\omega)$ es una función par (y que la fase de $\tilde{f}(\omega)$ es una función impar).

Problema 11

La formula de derivada del espectro dice que

$$\mathcal{F}[tf(t)] = \frac{d}{d(-i\omega)} \tilde{f}(\omega)$$

En nuestro caso tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[tI_a(t)] &= \int_{-a/2}^{a/2} t e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{d}{d(-i\omega)} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{d}{d(-i\omega)} \left[a \operatorname{sinc}\left(\frac{a\omega}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el resultado del problema 8b)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[tI_a\left(t\right)\right] &= ia\frac{d}{d\omega}\frac{\sin\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{\frac{a\omega}{2}} \\ &= ia\frac{\frac{a}{2}\cos\left(\frac{a\omega}{2}\right)\frac{a\omega}{2}-\frac{a}{2}\sin\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{\left(\frac{a\omega}{2}\right)^2} \\ & i\frac{\cos\left(\frac{a\omega}{2}\right)a\omega-2\sin\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{\omega^2}\end{aligned}$$

¿ Cual es el límite en $\omega \to 0$? Como $f\left(t\right)$es impar, notad que la transformada de Fourier es imaginaria.

Problema 12

Problema 12a)

La transformada de Fourier de la función Gaussiana es

$$\exp\left(-at^2\right) \quad \to \quad \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left[-\frac{\omega^2}{4a}\right]$$

entonces utilizando la dualidad $t \to d/d\left(-i\omega\right)$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[t\exp\left(-at^2\right)\right] &= \frac{d}{d\left(-i\omega\right)}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left[-\frac{\omega^2}{4a}\right]\right\} \\ &= -i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\frac{\omega}{2a}\exp\left[-\frac{\omega^2}{4a}\right]\end{aligned}$$

Problema 12b)

Utilizando la dualidad $d/dt \to \left(i\omega\right)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{-\frac{1}{2a}\frac{d}{dt}\left[\exp\left(-at^2\right)\right]\right\} &= -\frac{1}{2a}\left(i\omega\right)\mathcal{F}\left[\exp\left(-at^2\right)\right] \\ =- & \frac{i\omega}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left[-\frac{\omega^2}{4a}\right]\end{aligned}$$

Problema 13

Problema 13a)

Se deduce del problema 16 poniendo $p = 0$.

Problema 13b)

La integral de Fourier de la función Gaussiana $\exp\left(-a\omega^2\right)$ está definida como

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\omega^2} e^{i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-a\left[\left(\omega - \frac{it}{2a}\right)^2 + \frac{t^2}{4a^2}\right]\right\} d\omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \exp\left(-\frac{t^2}{4a}\right)
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Problema 14

Espacio vectorial sobre $'+'$

Definimos $h(t)$ como la suma de dos funciones de el espacio de Schwartz.

$$h(t) = f(t) + g(t)$$

- La suma de dos funciones que pertenecen al espacio de Schwartz pertenece al espacio de Schwartz

$$\begin{aligned}
\left|t^n \frac{d^m}{dt^m} h(t)\right| &= \left|t^n \frac{d^m}{dt^m}\left[f(t) + g(t)\right]\right| \\
&\leq \left|t^n \frac{d^m}{dt^m} f(t)\right| + \left|t^n \frac{d^m}{dt^m} g(t)\right| \\
&\leq M_{nm} + M_{nm}^{'} = M_{nm}^{''}
\end{aligned}$$

- La conmutatividad y la asociatividad vienen del $'+'$ natural de la suma de dos funciones.
- La función $\theta(t) = 0$ se define como el elemento neutro (y es acotada)
- Multiplicación un escalar complejo: $\alpha f(t)$ pertenece al espacio de Schwartz con $\left(M_{nm}^{'} = |\alpha| M_{nm}\right)$.

Problema 15

Espacio vectorial sobre $'\times'$? (no lo es !)

Definimos $h(t)$ como el producto de dos funciones de el espacio de Schwartz.

$$h(t) = f(t)\,g(t)$$

- El producto de dos funciones que pertenecen al espacio de Schwartz pertenece al espacio de Schwartz. Por eso, utilizamos la formula de Leibniz

$$\frac{d^n}{dt^n}[f(t)\,g(t)] = \sum_{p=0}^{m} C_n^p f^{(p)} g^{(n-p)}$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\left|t^n \frac{d^m}{dt^m} h(t)\right| &= \left|t^n \frac{d^m}{dt^m}[f(t)\,g(t)]\right| \\
&= \left|t^n \sum_{p=0}^{m} C_m^p f^p g^{m-p}\right| \\
&\leq |t^n| \sum_{p=0}^{m} \left|C_m^p f^p g^{m-p}\right| \\
&\leq M_{nm}^{''}
\end{aligned}$$

con la definición siguiente de $M_{nm}^{''}$

$$M_{n,m}^{''} = \sum_{p=0}^{m} C_m^p M_{n,p} M_{0,m-p}^{'}$$

y donde hemos utilizado que

$$\begin{aligned}
|t^n|\, f^p &\leq M_{n,p} \\
g^{m-p} &\leq M_{0,m-p}^{'}
\end{aligned}$$

- La comutatividad y la asociatividad vienen del $'\times'$ natural del producto de dos funciones.
- La función $\theta(t) = 1$ está definida como el elemento neutro pero $\theta(t)$ NO ES ACOTADA, es decir que no tenemos $|t^n f^p| \leq M_{n,p}$ (poner $p = 0$).
- Multiplicación un escalar complejo: $\alpha f(t)$ pertenece al espacio de Schwartz con $\left(M_{nm}^{'} = |\alpha| M_{nm}\right)$.

-

Problema 16

Con $f(t) = t^p \exp\left(-at^2\right)$, se puede demostrar de manera recursiva que

$$\frac{d^m}{dt^m} f(t) = P_m(t)\, e^{-at^2}$$

con $P_m(t)$ un polinomio de grado máximo igual a $m + p$. Entonces para demostrar que $f(t)$ pertenece al espacio de Schwartz

$$\left| t^n \frac{d^m}{dt^m} f(t) \right| \leq M_{nm}$$

solo hace falta demostrar que

$$\left| t^k e^{-at^2} \right| \leq B_k$$

porque la suma (finita) de funciones que pertenecen al espacio de Schwartz pertenece al espacio de Schwartz (ver problema 14).

Tenemos que

$$\lim_{t \to \pm\infty} t^k e^{-at^2} = 0$$

esta función tiene dos máximos en $t = \pm\sqrt{k/(2a)}$ y un mínimo en $t = 0$ con k par, y un mínimo y un máximo en $t = \pm\sqrt{k/(2a)}$ con k impar. Entonces encontramos que esta función es acotada en valor absoluto

$$\left| t^k e^{-at^2} \right| \leq B_k$$

con la definición siguiente de B_k

$$B_k = \left(\frac{k}{2a}\right)^{k/2} \exp\left(-\frac{k}{2}\right)$$